第46卷 第4期
2023年4月

核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn

Vol.46, No.4
April 2023

临界现象与泛函重整化群

尹 诗　谈阳阳　付伟杰
（大连理工大学 物理学院　大连 116024）

摘要 本文主要介绍了近年来泛函重整化群（Functional Renormalization Group，fRG）在量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）相变及其临界现象研究中的一些进展，主要侧重于与QCD的临界终点（Critical End Point，CEP）相关的非微扰临界指数的计算、重子数的涨落等。fRG是一种非微扰连续场论的理论方法，其基本思想是通过重整化群能标从高能向低能的演化，连续不断地将不同尺度的量子涨落以及热涨落积分到理论体系当中。本文讨论了非微扰有效势重整化群流方程和不动点方程的各种求解方法，包括泰勒展开、空间维数$\varepsilon = 4 - d$展开以及最近被提出的非局域势直接求解方法。还系统地讨论了与QCD的临界终点等临界现象密切相关的重子数的涨落，探讨了实验观测到的净质子数分布的峰度，也就是四阶矩随碰撞能量非单调依赖关系的可能原因。

关键词 QCD相结构，QCD临界终点，泛函重整化群，临界现象，相对论重离子碰撞
中图分类号 TL99
DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040002

Critical phenomena and functional renormalization group

YIN Shi　TAN Yangyang　FU Weijie
(*School of Physics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

Abstract Recent progress in studies on quantum chromodynamics (QCD) phase transition and related critical phenomena within the functional renormalization group (fRG) approach were reviewed, including the nonperturbative critical exponents and baryon number fluctuations, which are pertinent to the critical end point (CEP) in the QCD phase diagram. The fRG is a nonperturbative continuum field approach, in which quantum thermal fluctuations are successively integrated with the evolution of the renormalization group (RG) scale. Different methods of finding solutions to the flow or fixed-point equations of a nonperturbative effective potential have been discussed, for example, the Taylor expansion, expansion of the spatial dimension $\varepsilon = 4 - d$, and the recently proposed direct solution of the global potential. Furthermore, the baryon number of fluctuations is relevant to the critical phenomena of the CEP. Both have been discussed, and one explores the underlying reasons for the observed non-monotonic dependence of the kurtosis of the net proton number of distributions on collision energy in experiments.

Key words QCD phase structure, QCD critical end point, Functional renormalization group, Critical phenomena, Relativistic heavy ion collisions

国家自然科学基金面上项目(No.12175030)资助
第一作者：尹诗，男，1996年出生，2018年毕业于大连理工大学，博士研究生，研究领域为中高能核物理
通信作者：付伟杰，E-mail：wjfu@dlut.edu.cn
收稿日期：2022-12-22，修回日期：2023-02-22
Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12175030)
First author: YIN Shi, male, born in 1996, graduated from Dalian University of Technology in 2018, doctoral student, focusing on medium and high energy nuclear physics
Corresponding author: FU Weijie, E-mail: wjfu@dlut.edu.cn
Received date: 2022-12-22, revised date: 2023-02-22

近年来，高温高密等极端条件下强相互作用物质的性质、量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）相图和相结构已成为中高能核物理、相对论重离子碰撞、致密星体以及引力波等领域的前沿研究热点[1−5]。图1是一张比较典型的QCD相图的示意图，纵坐标是温度，横坐标是重子化学势，化学势越大，QCD物质的密度也越高。由图1可以看到，在高温低密的区域相边界是一条虚线，这条虚线不是一条严格意义上的相变线，而是一种连续的变化，也被称为连续过渡，这也被第一性原理的格点QCD模拟所证实[6]，同时也符合实验测量的结果[7]。

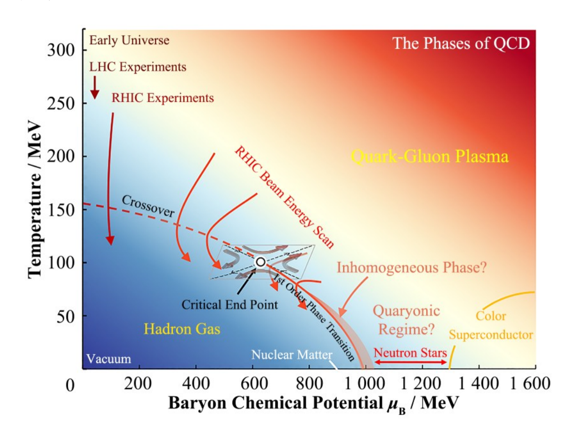


图1　QCD相图的示意图

Fig.1　Schematic phase diagram of QCD

随着密度或者化学势的增加，由于符号问题，格点QCD的计算变得越来越困难，其可靠性通常被限制在图1中$\mu_B/T \leqslant 2\sim3$的区域[8−10]，这里μ_B是重子化学势，T是温度。其他理论方法，比如第一性原理的泛函连续场论[11−15]、低能有效模型[16−20]的计算表明，在高密区域连续过渡有可能转变为一级相变，如图1中红色实线所示。而这条一级相变线的终点，也被称为QCD的临界终点（Critical End Point，CEP），也就是图1中黑线空心小圆圈所代表的点，将一级相变线和连续过渡连接起来。从这里我们可以发现CEP在QCD相图上的特殊地位，它的存在与否决定了高密区域是否存在一级相变。假如相图上确实存在CEP，那么它在相图上的位置必然能够反映有限温度有限密度非微扰QCD的性质，通过实验测量这将会给我们提供一个研究强关联QCD物质性质的一个新的窗口。我们知道，作为一级相变线终点的CEP是一个二级相变，从重整化群随能标演化的角度来讲，CEP所对应的系统处在某个重整化群跑动的不动点（也称为固定点）的临界曲面上[21]。我们在图1 CEP的周边示意性地画出了这个抽象的参数空间，其中若干黑色带箭头的曲线代表参数空间中重整化群的流动，可以看到CEP确实正好处在重整化群演化的不动点上。20世纪70年代初，自从Wilson等[22−25]将重整化群的观点和方法引入到二级相变和临界现象的研究中，相关的领域得到了突破性的发展。现在我们知道二级相变的临界行为，比如刻画临界行为的各种临界指数具有普适性，其只依赖于体系的空间维数、对称性等等，而与相互作用的细节无关。具体到QCD相图上的CEP，它作为一级相变线的终点属于$Z(2)$对称性普适类，也就是伊辛模型的普适类。

目前，有很多重离子实验设备正在或者准备在实验中探寻CEP[7,26−37]。我们知道，在二级相变点附近，体系的关联长度明显增加，在理想热力学极限的情况下，CEP处的关联长度趋于发散。热力学和统计物理的基础知识告诉我们，有一些观测量（如各种守恒荷的涨落）对这种临界动力学所导致的奇异性特别敏感，而且阶数越高涨落越敏感。早在二十多年前，就提出在重离子碰撞实验中可以利用守恒荷涨落随碰撞能量的非单调依赖关系来探寻QCD相图上的CEP[38−40]，也可以参考文献[26]。过去10年，布鲁克海文国家实验室相对论重离子碰撞实验（Relativistic Heavy Ion Collider，RHIC）束流能量扫描项目（Beam Energy Scan，BES）第一阶段的实验，测量了净质子、净电荷以及净K介子多重度分布的各阶矩及其它们之间的关联[41−48]，取得了丰硕的成果，特别是在最近的实验中，以3.1σ的显著性观测到了净质子多重度分布的峰度随对撞能量的非单调依赖关系[46]。

理论研究方面，前面我们已经提到由于有限化学势情况下的符号问题，格点QCD模拟被限制在$\mu_B/T \leqslant 2\sim3$的区域，但在这个区域并没有发现CEP[49]。近年来，第一性原理泛函连续场论的方法得到了快速的发展[11,15]，泛函连续场论的计算不仅在化学势比较小的区域，例如$\mu_B/T \leqslant 2$，得到了格点QCD的检验，并且其计算的可靠性还被拓展到$\mu_B/T \leqslant 3\sim4$的区域。此外，近年来不同的连续场论的方法，如泛函重整化群（Functional Renormalization Group，fRG）以及Dyson-Schwinger方程都对CEP在相图上的位置进行了估计，这两种方法给出了在误差范围内一致的结果，都表明CEP所对应的化学势约在600 MeV[12−14]。

本文计划介绍近年来泛函重整化群在QCD相变及其临界现象研究中的一些进展，包括非微扰临界指数的计算、重子数的涨落等。fRG是一种非微扰连续场论的理论方法，其基本的思想是通过重整化群能标从高能向低能地跑动，连续不断地将不同尺度的量子涨落以及热涨落积分到我们的体系当

中[50]。fRG已经被应用到非微扰的很多领域，QCD相关的fRG综述可参考文献[15,51-58]。近年来的一些重要进展可参考文献[12,59-65]。

1 泛函重整化群简介

首先，生成泛函如下：

$$Z_k[J]=\int(\mathcal{D}\hat{\Phi})\exp\left\{-S[\hat{\Phi}]-\Delta S_k[\hat{\Phi}]+J^a\hat{\Phi}_a\right\} \tag{1}$$

式中：$\hat{\Phi}$代表了某一场论中所有的场；$S[\hat{\Phi}]$是其经典作用量。在这里引入一个能标k依赖的红外抑制函数$\Delta S_k[\hat{\Phi}]$，其作用是抑制生成泛函(1)中动量模式$q\lesssim k$的量子涨落，而不影响$q>k$的涨落。通常，为了简便选用双线性场形式的红外抑制函数：

$$\Delta S_k[\hat{\Phi}]=\frac{1}{2}\hat{\Phi}_a R_k^{ab}\hat{\Phi}_b \tag{2}$$

其中：对于玻色型的指标有$R_k^{ab}=R_k^{ba}$，对于费米型$R_k^{ab}=-R_k^{ba}$。

下面以只有一个分量的标量场φ为例，其红外抑制函数为：

$$\Delta S_k[\varphi]=\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\;\varphi(x)R_k(x,y)\varphi(y) \tag{3}$$

利用动量空间的傅里叶变换：

$$\varphi(x)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\varphi(q)e^{iqx} \tag{4}$$

以及：

$$R_k(x,y)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}R_k(q)e^{iq(x-y)} \tag{5}$$

得到：

$$\Delta S_k[\varphi]=\frac{1}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\varphi(-q)R_k(q)\varphi(q) \tag{6}$$

根据前面的要求，希望抑制函数具有如下的渐近行为：

$$R_{k\to\infty}(q)\to\infty,\quad R_{k\to 0}(q)\to 0\quad(\text{fixed}\,q) \tag{7}$$

此外，为了有选择性地抑制低动量区域的量子涨落，进一步要求：

$$R_k(q)\big|_{q<k}\sim k^2,\quad R_k(q)\big|_{q>k}\sim 0 \tag{8}$$

显然，满足上面要求的抑制函数有无穷多种选择，下面介绍两类在文献中使用比较多的抑制函数。第一类是指数型的抑制函数：

$$R_k^{\exp,n}(q)=q^2 r_{\exp,n}(q^2/k^2),\quad r_{\exp,n}(x)=\frac{x^{n-1}}{e^{x^n}-1} \tag{9}$$

参数n控制抑制函数在$q\sim k$处的陡峭程度。另一类更适合解析计算的抑制函数被称为平坦抑制函数，或者称为最优化抑制函数[66-67]：

$$R_k^{\text{opt}}(q)=q^2 r_{\text{opt}}(q^2/k^2),\quad r_{\text{opt}}(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\Theta(1-x) \tag{10}$$

式中：$\Theta(x)$是阶梯函数。

由场论的一般理论，知道连通关联函数的生成泛函可以写成：

$$W_k[J]=\ln Z_k[J] \tag{11}$$

这也被称为Schwinger函数，场的期待值可以通过对Schwinger函数求外源的一阶导数得到：

$$\Phi_a=\langle\hat{\Phi}_a\rangle=\frac{\delta W_k[J]}{\delta J^a} \tag{12}$$

再求一次导数可以得到传播子：

$$G_{k,ab}\equiv\langle\hat{\Phi}_a\hat{\Phi}_b\rangle_c=\langle\hat{\Phi}_a\hat{\Phi}_b\rangle-\langle\hat{\Phi}_a\rangle\langle\hat{\Phi}_b\rangle=\frac{\delta^2 w_k[J]}{\delta J^a\delta J^b} \tag{13}$$

对Schwinger函数作Legendre变换，得到单粒子不可约(1PI)有效作用量：

$$\Gamma_k[\Phi]=-W_k[J]+J^a\Phi_a-\Delta S_k[\Phi] \tag{14}$$

引入如下记号：

$$J^a\Phi_a=\gamma_b^a\Phi_a J^b \tag{15}$$

其中：当a,b是费米型指标，$\gamma_b^a=-\delta_b^a$；当a,b是玻色型指标，$\gamma_b^a=\delta_b^a$。这样得到：

$$\frac{\delta(\Gamma_k[\Phi]+\Delta S_k[\Phi])}{\delta\Phi}=\gamma_b^a J^b \tag{16}$$

进而可以得到传播子和有效作用量的关系：

$$G_{k,ab}=\gamma_a^c\left(\Gamma_k^{(2)}[\Phi]+\Delta S_k^{(2)}[\Phi]\right)_{cb}^{-1} \tag{17}$$

这里有：

$$\left(\Gamma_k^{(2)}[\Phi]+\Delta S_k^{(2)}[\Phi]\right)^{ab}\equiv\frac{\delta^2(\Gamma_k[\Phi]+\Delta S_k[\Phi])}{\delta\Phi_a\delta\Phi_b} \tag{18}$$

由式(1)和(11)容易得到Schwinger函数随k的演化方程：

$$\partial_t W_k[J]=-\frac{1}{2}\text{Sr}\left[(\partial_t R_k)G_k\right]-\frac{1}{2}\Phi_a(\partial_t R_k^{ab})\Phi_b \tag{19}$$

这里引入了重整化群时间$t=\ln(k/\Lambda)$，Λ是某一参考能标，比如紫外演化初始能标。在式(19)中还引入了一个记号超求迹：

$$\text{STr}\left[(\partial_t R_k)G_k\right]=(\partial_t R_k^{ab})\gamma_b^c G_{k,ca} \tag{20}$$

再一次利用Legendre变换：

$$\partial_t\Gamma_k[\Phi]=-\partial_t W_k[J]-\partial_t\Delta S_k[\Phi]=\frac{1}{2}\text{STr}\left[(\partial_t R_k)G_k\right] \tag{21}$$

这就是有效作用量的流方程，也被称为Wetterich方程[50]。

有效作用量的流方程(21)可以改写为：

$$\partial_t\Gamma_k[\Phi]=\frac{1}{2}\text{STr}\left[\tilde{\partial}_t\ln\left(\Gamma_k^{(2)}[\Phi]+R_k\right)\right] \tag{22}$$

其中：$\tilde{\partial}_t$代表只对抑制函数的重整化群能标k的依赖性求偏导，这里$\Gamma_k^{(2)}$的定义与前面略有不同：

$$\left(\Gamma_k^{(2)}[\Phi]\right)^{ab} \equiv \frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi_a} \Gamma_k[\Phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi_b} \tag{23}$$

这里使用了左右导数，这是为了吸收费米型场所多出来的负号。作如下的组合：

$$\Gamma_k^{(2)}[\Phi] + R_k = \mathcal{P} + \mathcal{F} \tag{24}$$

其中：$\mathcal{P}$是两点关联函数矩阵，不含有相互作用，其倒数就是传播子矩阵；$\mathcal{F}$是相互作用矩阵，也就是相互作用顶点。将上面有效作用量的流方程作形式上的泰勒展开：

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2}\mathrm{STr}\left[\tilde{\partial}_t \ln(\mathcal{P}+\mathcal{F})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{STr}\tilde{\partial}_t \ln\mathcal{P} + \frac{1}{2}\mathrm{STr}\tilde{\partial}_t\left(\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}\right) - \\ \frac{1}{4}\mathrm{STr}\tilde{\partial}_t\left(\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}\right)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{STr}\tilde{\partial}_t\left(\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}\right)^3 - \frac{1}{8}\mathrm{STr}\tilde{\partial}_t\left(\frac{1}{\mathcal{P}}\mathcal{F}\right)^4 + \cdots\end{aligned} \tag{25}$$

通过比较上面方程两边各种类型场的幂次，得到各阶关联函数，包括各种传播子和顶点的流方程。

事实上，还有一种更简单的方法可以很方便地给出各阶关联函数的流方程，可以借用同微扰论完全一致的费曼规则。首先我们定义一个一般的n点1PI关联函数，或者称为n点顶点：

$$V^{(n)}_{k,\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}} \equiv -\Gamma^{(n)}_{k,\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}} \equiv -\left(\frac{\delta^n \Gamma_k[\Phi]}{\delta\Phi_{a_1}\ldots\delta\Phi_{a_n}}\right)\Bigg|_{\Phi=<\Phi>} \tag{26}$$

这样顶点$V_k^{(n)}$的流方程可以表示为：

$$\partial_t V_{k,\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}^{(n)}} = \tilde{\partial}_t\left(\begin{array}{c}\text{all one - loop correction} \\ \text{diagrams of } V^{(n)}_{k,\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}}\end{array}\right) \tag{27}$$

更详细的讨论可参考文献[15]。

2　$O(N)$标量理论

在连续相变的临界点附近，系统的关联长度会趋于发散，系统的微观细节会被临界点附近强烈的涨落掩盖，临界点附近物理量的行为通常可以用临界指数来描述，它们只依赖于系统的空间维数与对称性。d维的$O(N)$理论则恰好涵盖了不同的空间维数与对称性，在临界点附近它可以描述大部分真实物理系统的二阶相变。

Wilson的重整化群[22–25]则是描述相变的一个强大的理论工具。二阶相变由重整化群流方程所确定的临界面上的稳定固定点所描述。fRG则更进一步地在重整化群的流中包括了非微扰的信息，这让我们能在空间维数比较小时更精确地描述相变。

首先来看$O(N)$标量理论的有效作用量：

$$\Gamma_k[\phi] = \int \mathrm{d}^d x\left[\frac{1}{2}Z_{\phi,k}(\nabla\phi)^2 + V_k(\rho) - h\phi_0\right] \tag{28}$$

式中：h是外场；$V_k(\rho)$是一个关于场的一般函数，通常也被称为有效势，其中有：

$$\rho = \phi^2/2,\ \phi^2 = \sum_{i=0}^{N-1}\phi_i^2 \tag{29}$$

显然，$V_k(\rho)$具有$O(N)$对称性。在Wetterich方程的右边需要计算动量空间中的两点函数：

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)\phi\phi}_{k,ij}(q',q) \equiv \frac{\delta^2\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi_i(q')\delta\phi_j(q)} = \Big[\left(Z_{\phi,k}q^2 + V_k'(\rho)\right)\delta_{ij} + \\ V_k^{(2)}(\rho)\phi_i\phi_j\Big](2\pi)^d\delta^d(q'+q)\end{aligned} \tag{30}$$

选择场的零分量（纵向）来携带场的期待值而让其他方向（横向）的期待值为零。

$$\begin{aligned} m^2_{i,k} &= 2\rho V_k^{(2)}(\rho)\delta_{i0} + V_k'(\rho) \\ m^2_{\sigma,k} &\equiv m^2_{i=0,k} = 2\rho V_k^{(2)}(\rho) + V_k'(\rho) \\ m^2_{\pi,k} &\equiv m^2_{i\neq 0,k} = V_k'(\rho)\end{aligned} \tag{31}$$

动量空间中的抑制函数写为：

$$\begin{aligned}R^{\phi\phi}_{k,ij}(q',q) &= R_k^\phi(q)(2\pi)^d\delta^d(q'+q)\delta_{ij} \\ &= Z_{\phi,k}q^2 r(q^2/k^2)(2\pi)^d\delta^d(q'+q)\delta_{ij}\end{aligned} \tag{32}$$

抑制函数对重整化能标的导数为：

$$\partial_t R_k^\phi(q) = -Z_{\phi,k}xk^2\left(\eta r(x) + 2xr'(x)\right) \tag{33}$$

其中，$x = q^2/k^2$。反常量纲：

$$\eta = -\frac{\partial_t Z_{\phi,k}}{Z_{\phi,k}} \tag{34}$$

把这些代入Wetterich方程并做如下无量纲化重定义：

$$\begin{aligned}&\bar{\rho} = k^{-(d-2)}Z_{\phi,k}\rho,\quad u_k(\bar{\rho}) = k^{-d}V_k(\rho), \\ &\bar{m}_\sigma^2 = \frac{m^2_{\sigma,k}}{Z_{\phi,k}k^2},\quad \bar{m}_\pi^2 = \frac{m^2_{\pi,k}}{Z_{\phi,k}k^2}\end{aligned} \tag{35}$$

可以得到无量纲化的有效势的流方程：

$$\begin{aligned}\partial_t u(\bar{\rho}) = -du(\bar{\rho}) + (d-2+\eta)\bar{\rho}u'(\bar{\rho}) + \\ \mathcal{C}\left[I(\bar{m}_\sigma^2) + (N-1)I(\bar{m}_\pi^2)\right]\end{aligned} \tag{36}$$

这里函数I的具体形式与抑制函数的选择有关。原则上来说物理量在固定点附近的行为不依赖于抑制函数的选取，但是，在实际的计算中通常要对我们的理论做截断，譬如通常用的局域势近似（Local Potential Approximation，LPA）近似就是只考虑梯度展开的最低阶，这会引入一定程度上的抑制函数的依赖性。这时就需要选择一个恰当的抑制函数，让理论尽量减少这种依赖性，在低阶截断的情况下也能很好地描述真实的物理。关于抑制函数的选

择及其优化，更详细的讨论可参考文献[66–67]。在这里采用式(10)中介绍过的抑制函数：

$$r_{\mathrm{opt}}(x)=\left(x^{-1}-1\right)\Theta(1-x) \tag{37}$$

此时有$I(x)=1/(1+x)$，式(36)中的系数：

$$\mathcal{C}=\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Gamma(d/2)}\left[(2-\eta)\frac{2}{d}+\eta\frac{2}{d+2}\right] \tag{38}$$

3 高斯固定点

暂时不考虑反常量纲，设$\eta=0$，并将方程(36)在$\bar{\rho}=0$附近作泰勒展开[68]：

$$u(\bar{\rho})\simeq\sum_{n=1}\frac{\lambda_n}{n!}\bar{\rho}^n \tag{39}$$

其中：展开系数λ_n对应着没有动量依赖的无量纲化的$2n$点耦合强度，特别地，λ_1是场为零时的曲率质量。如果展开到二阶并且忽略四点相互作用对四点强度λ_2的流的贡献，得到：

$$\begin{aligned}\partial_t\lambda_1&=-2\lambda_1-\mathcal{C}(N+2)\lambda_2\left(1+\lambda_1\right)^{-2}\\ \partial_t\lambda_2&=-(4-d)\lambda_2\end{aligned} \tag{40}$$

这样就给出了相应耦合强度的β函数：

$$\partial_t\lambda_i=\beta_i(\lambda) \tag{41}$$

令$\beta_1=\beta_2=0$，上面的常微分方程就变成了一个代数方程，它的解是重整化群方程的固定点：

$$\lambda_1^*=\lambda_2^*=0 \tag{42}$$

如果重整化群方程的固定点满足$\lambda_i^*=0$，我们说这样的固定点是平庸的或者说是高斯固定点。一般来说，像方程(40)这样的重整化群流方程不能解析求解，在固定点附近利用小量：

$$\delta\vec{\lambda}=\vec{\lambda}-\vec{\lambda}^*,\quad \vec{\lambda}\equiv\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\} \tag{43}$$

可以将方程(40)线性化：

$$\partial_t\delta\vec{\lambda}\equiv M\delta\vec{\lambda}=\begin{pmatrix}-2&-\mathcal{C}(N+2)\\0&-(4-d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\lambda_1\\ \delta\lambda_2\end{pmatrix} \tag{44}$$

这里定义了矩阵：

$$M_{ij}\equiv\left.\frac{\partial\beta_i}{\partial\lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda^*} \tag{45}$$

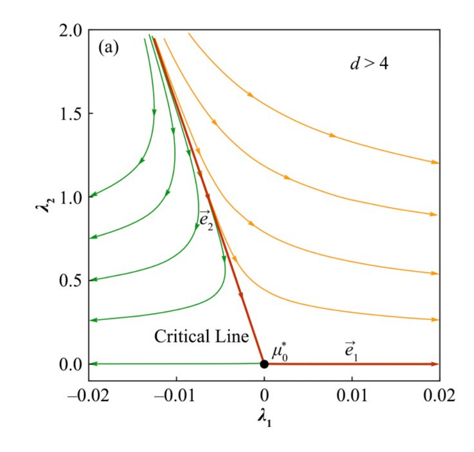
M矩阵的第i个本征值和本征矢量分别记为y_i和$\vec{e}_i$，上面重整化群流方程的解可以一般地写成：

$$\delta\vec{\lambda}=\sum_i\alpha_i e^{y_i t}\vec{e}_i \tag{46}$$

式中：α_i是常数小量。对于这里讨论的高斯固定点，它的本征值和本征矢量分别为：

$$\begin{aligned}&y_1=-2,\ y_2=-(4-d)\\ &\vec{e}_1=(1,0)^T,\ \vec{e}_2=\left(-\frac{\mathcal{C}(N+2)}{d-2},1\right)^T\end{aligned} \tag{47}$$

这样可以得到与关联长度相关的临界指数$\nu=-1/y_1=0.5$。图2展示了重整化群方程(40)的流在$\lambda_1-\lambda_2$平面上的演化行为，箭头所指的方向是重整化群向红外流动的方向，μ_0^*是唯一的一个高斯固定点，$\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$是两个本征矢量。由于重整化的能标向红外流动，即式(46)中$t<0$，所以，当本征值大于零，所对应的本征矢量流向固定点，而当本征值小于零，所对应的本征矢量流出固定点。图2(a)是空间维数$d>4$时的流图，在这种情况下$y_1<0$,$y_2>0$，因而可以看到，重整化群的流沿本征矢量$\vec{e}_1$流出高斯固定点，而沿$\vec{e}_2$流入固定点，这样式(46)中相应的参数α_1是相关参数，α_2是无关参数。我们称像这样只有一个相关参数的固定点为稳定固定点，它对应于物理上的二阶相变。参数空间中相关参数为零的子空间也被称为临界面，或者临界线，显然图2(a)中本征矢量$\vec{e}_2$即为临界线。随着重整化群流的跑动，无论从哪个点出发，无关参数的值会趋于零，唯一的相关参数的值会发散。由此得出结论，当空间维数$d\geqslant4$时，高斯固定点是唯一的固定点，也是物理的固定点，$d=4$是上临界维数，上临界维数之上，临界指数



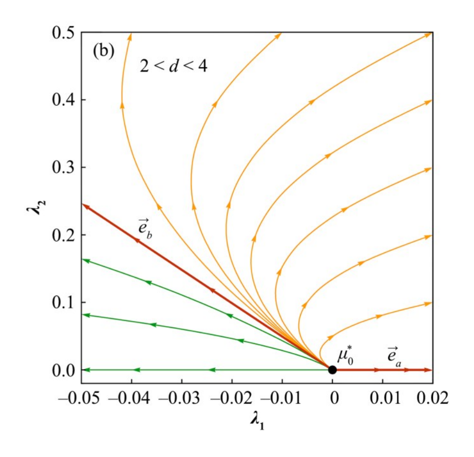


图2 高斯固定点附近重整化群方程的流图 (a) $d>4$，(b) $2<d<4$

Fig.2 Flow diagram of RG equations around the Gaussian fixed point in dimensions (a) $d>4$, (b) $2<d<4$

与平均场理论相同。图2(b)是空间维数$2<d<4$时的流图，可以看到，本征矢量$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$都是从固定点流出，此时的高斯固定点有两个相关参量，是不稳定的固定点，因而$2<d<4$情况下的高斯固定点不是物理的固定点，需要寻找新的固定点。

在$d<4$时无量纲化之前的四点相互作用强度也是相关参数，它不能被忽略。更一般地，$2n$顶点耦合强度(无量纲化之前)的量纲为$[\tilde{\lambda}_n]=2n-(n-1)d$，通过假设$\lambda_{n+1}$是边缘参数，即$[\tilde{\lambda}_{n+1}]=0$，可以解出临界维的表达式：$d_n=2+2/n$，当$d_n\leqslant d<d_{n+1}$时有$n$个相关参数，更完整的计算表明，此时在高斯固定点上有n个小于零的本征值，以及n条流出固定点的本征矢量。特别地，当$d=2$时，在高斯固定点旁边的本征扰动有无穷多个小于零的本征值，因而有无穷多个相关参数，以及无穷多条流出固定点的本征矢量。

4 $\varepsilon=4-d$展开及Wilson-Fisher固定点

从§3分析知道，在$2<d<4$时，高斯固定点不能描述物理上的二阶相变。而此时四点相互作用强度λ_2已经是相关参数，因此，需要考虑它对式(40)中$\partial_t\lambda_2$的贡献，这样方程(40)变为：

$$\begin{aligned}\partial_t\lambda_1&=-2\lambda_1-\mathcal{C}(N+2)\lambda_2(1+\lambda_1)^{-2}\\ \partial_t\lambda_2&=-(4-d)\lambda_2+2\mathcal{C}(N+8)(\lambda_2)^2(1+\lambda_1)^{-3}\end{aligned}\tag{48}$$

上面的流方程除了有高斯固定点$\lambda_1^*=\lambda_2^*=0$之外，从$\lambda_2$的流方程，可以发现，当$\varepsilon=4-d\ll1$，有一个$\lambda_1^*\sim\varepsilon$，$\lambda_2^*\sim\varepsilon$的固定点，在这个固定点上可以做近似$1+\lambda_1^*\sim1$，其满足的方程为：

$$\begin{aligned}\partial_t\lambda_1^*&=-2\lambda_1^*-\mathcal{C}(N+2)\lambda_2^*=0\\ \partial_t\lambda_2^*&=-\varepsilon\lambda_2^*+2\mathcal{C}(N+8)(\lambda_2^*)^2=0\end{aligned}\tag{49}$$

该代数方程的解为：

$$\lambda_1^*=-\frac{N+2}{4(N+8)}\varepsilon,\ \lambda_2^*=\frac{\varepsilon}{2\mathcal{C}(N+8)}\tag{50}$$

可以看到，它们都是$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶，这个非零的固定点被称为Wilson-Fisher(W-F)固定点。在W-F固定点附近将流方程(49)线性化，并且严格计算到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶，我们可以得到类似方程(44)的线性化的流方程，这时M矩阵为：

$$M=\begin{pmatrix}-2+\dfrac{N+2}{N+8}\varepsilon & -\mathcal{C}(N+2)\left[1+\dfrac{N+2}{2(N+8)}\varepsilon\right]\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\tag{51}$$

这个矩阵的一个本征值及其对应的本征矢量分别为：

$$y_1=-2+\frac{N+2}{N+8}\varepsilon,\ \vec{e}_1=(1,0)^T\tag{52}$$

$y_1<0$，因此这是相关参数，对应的临界指数ν精确到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶为[21]($-1/y_1$泰勒展开到ε阶)：

$$\nu=\frac{1}{2}+\frac{N+2}{4(N+8)}\varepsilon\tag{53}$$

另一个本征值及其对应的本征矢量为$y_2=\varepsilon$，$\vec{e}_2=(-B,1)^T$，显然$y_2>0$是无关参数，这里的常数B是：

$$B=\frac{1}{2}\mathcal{C}(N+2)\left[1+\frac{N+2}{2(N+8)}\varepsilon\right]\left[1+\frac{3}{(N+8)}\varepsilon\right]^{-1}\simeq\frac{1}{2}\mathcal{C}(N+2)\left[1+\frac{N-4}{2(N+8)}\varepsilon\right]\tag{54}$$

图3(a)给出了$2<d<4$情况下重整化群方程(49)的流图，可以清楚地看到，在平面上有两个固定点，一个是处于原点位置的高斯固定点，显然高斯固定点是不稳定的固定点，这同我们前面的分析是一致；另外一个标记为μ^*的固定点是W-F固定点，它是一个稳定的固定点，对应物理的二级相变。图3(b)在对称群参数N和空间维数d构成的平面上给出了W-F固定点精确到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶的临界指数ν的计算数值，即式(53)。可以看到ν随着d的减小和N的增大而单调增加。在大N极限时，球模型给出的严格结果为$\nu=1/(d-2)$，由于方程(53)的计算结果只精确到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶，在d比较小时，它显然不能与大N极限时的结果吻合。

在$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶，反常量纲$\eta=0$，可以利用标度率，计算出准确到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶的其它临界指数：

$$\begin{aligned}&\alpha=2-\nu d=\frac{4-N}{2(N+8)}\varepsilon,\ \beta=\frac{1}{2}\nu(d-2+\eta)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2(N+8)}\varepsilon\\ &\gamma=(2-\eta)\nu=1+\frac{N+2}{2(N+8)}\varepsilon,\ \delta=\frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}=3+\varepsilon\end{aligned}\tag{55}$$

5 临界指数的计算

我们计算了精确到$\mathcal{O}(\varepsilon)$阶的临界指数，但是它会在维数比较小时失效，一个最直接的改进是不对$\nu=-1/y_1$做ε展开，而直接保留方程(52)中y_1的表达式，那么可以得到：

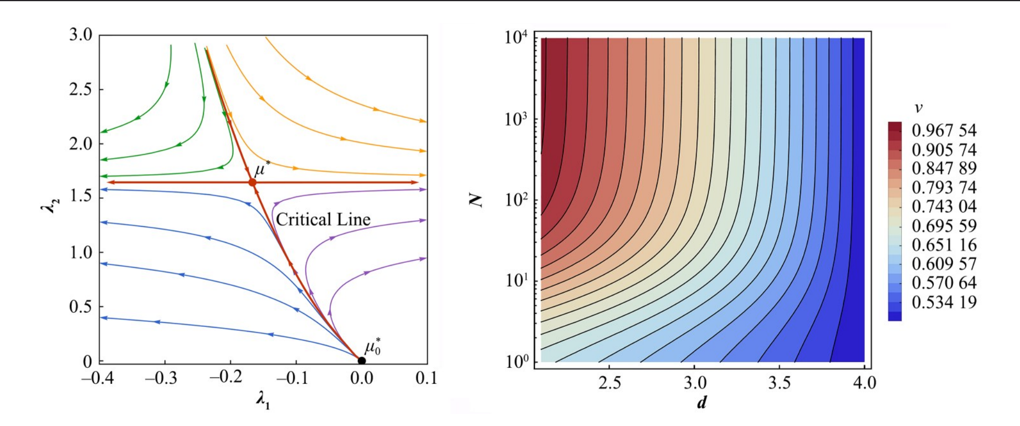


图3 (a) $2 < d < 4$情况下W-F固定点附近重整化群方程的流图，(b) 在对称群参数N和空间维数d的平面上得出的W-F固定点精确到$O(\varepsilon)$阶的临界指数ν的计算数值

Fig.3 (a) Flow diagram of RG equations around the W-F fixed point in $2 < d < 4$, (b) critical exponent ν in the order of $O(\varepsilon)$ at the W-F fixed point obtained in the plane of N of the $O(N)$ symmetry and the dimension d

$$\nu = \frac{8 + N}{8 - 2N + d(2 + N)} \tag{56}$$

在取$N \to \infty$极限时，得到球模型的严格结果$\nu = 1/(d - 2)$。根据MWH（Mermin-Wagner-Hohenberg）定理[69-71]，在二维时，不存在连续的自发对称性破缺，因此在$O(N)$模型中，当$d = 2, N \geqslant 2$时，系统不存在二级相变，临界指数ν会发散，而这里计算出的ν显然只有在$N \to \infty$才会发散，因此，这里计算的ν在d和N比较小时依然存在比较大的误差。

由朴素的量纲分析可知，无关参数要求$[\tilde{\lambda}_n] < 0$，结合之前对$2n$顶点耦合强度的量纲分析，这至少要求$n > d/(d - 2)$，当$d = 4, n > 2$；$d = 3, n > 3$；$d = 2.5, n > 5$；$d = 2.1, n > 21$；…。显然，当空间维数越低，就需要在重整化群的流方程中包含越来越多的耦合常数，或者说式(39)中的有效势的泰勒展开阶数需要越来越高。这里计算W-F固定点处临界指数的方法是利用式(39)将无量纲化的有效势在$\bar{\rho} = 0$处泰勒展开到n_{trunc}阶，然后把式(39)代入有效势的流方程(36)，这样就得到了n_{trunc}个常微分方程，进一步令$\partial_t \lambda_n = 0$，最后得到n_{trunc}个代数方程。从这些耦合的代数方程中可以得到一系列固定点，并且在每一个固定点上线性化这些常微分方程，可以得到方程(44)中的M矩阵。计算矩阵的本征值，W-F固定点对应的M矩阵有且仅有一个本征值小于零，这一个小于零的本征值的绝对值就是我们所要计算的临界指数ν的倒数。图4展示了在大N极限下，不同展开阶数计算出的临界指数ν的数值结果及其对空间维数的依赖性，可以看到随展开阶数的提高，临界指数的结果越来越接近真实值。但是不论展开到多少阶临界指数随d的变化都存在非单调性行为。

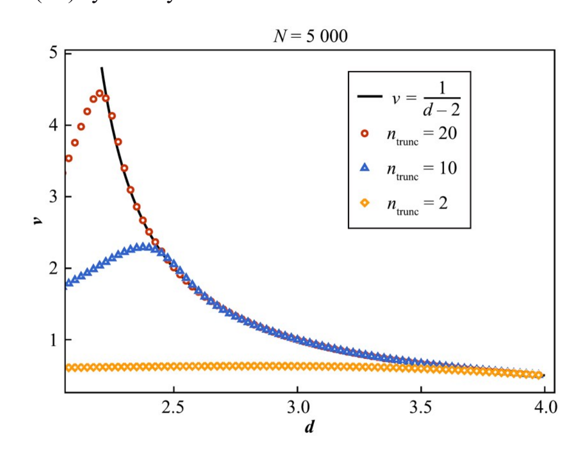


图4 对称群参数$N \to \infty$极限下，取$N = 5\,000$，不同展开阶数计算出的临界指数ν随维数d的变化

Fig.4 Critical exponent ν in the limit of large $N \to \infty$ as a function of the spatial dimension d calculated with different values of the expansion order n_{trunc}

在图5中，计算了不同展开阶数下临界指数ν在d - N平面上的行为。随展开阶数的增加，临界指数确实可以被计算到越来越小的维数，但是不能任意地接近$d = 2$，当展开阶数越来越高，在维数比较小时，临界指数的行为越来越奇异。这是由于有效势泰勒展开存在收敛半径。随着维数越来越接近2，有效势最小值点的位置会越来越远离零点，而由于泰勒展开收敛半径的问题，在某个维数以下，即使我们展开到无穷阶也不可能把有效势展开到最小值点以外。想要解决这个问题，我们可以利用最近提出的一种方法[72]，直接求解非局域的有效势的固定点方程，然后在固定点有效势解的基础上利用本征微扰的方法，求得相应的临界指数，相关的更多细节可参考文献[72]。图6利用这一方法计算得到的临界指数ν，相较于图4的计算结果可以看到，非局域求解得到的临界指数在维数比较小的时候不再出现奇异的行为。利用这一方法求解得到的临界指数只存

在由于截断带来的系统误差。由于这里的计算没有考虑反常量纲的影响，在 $d = 2$ 时，临界指数 ν 在任意 N 数值下都会发散，这比MWH定理的限制更强。如果进一步考虑反常量纲的影响，临界指数数值计算的系统误差会进一步降低，并且与MWH定理的要求完全符合，相关的研究正在进行中。

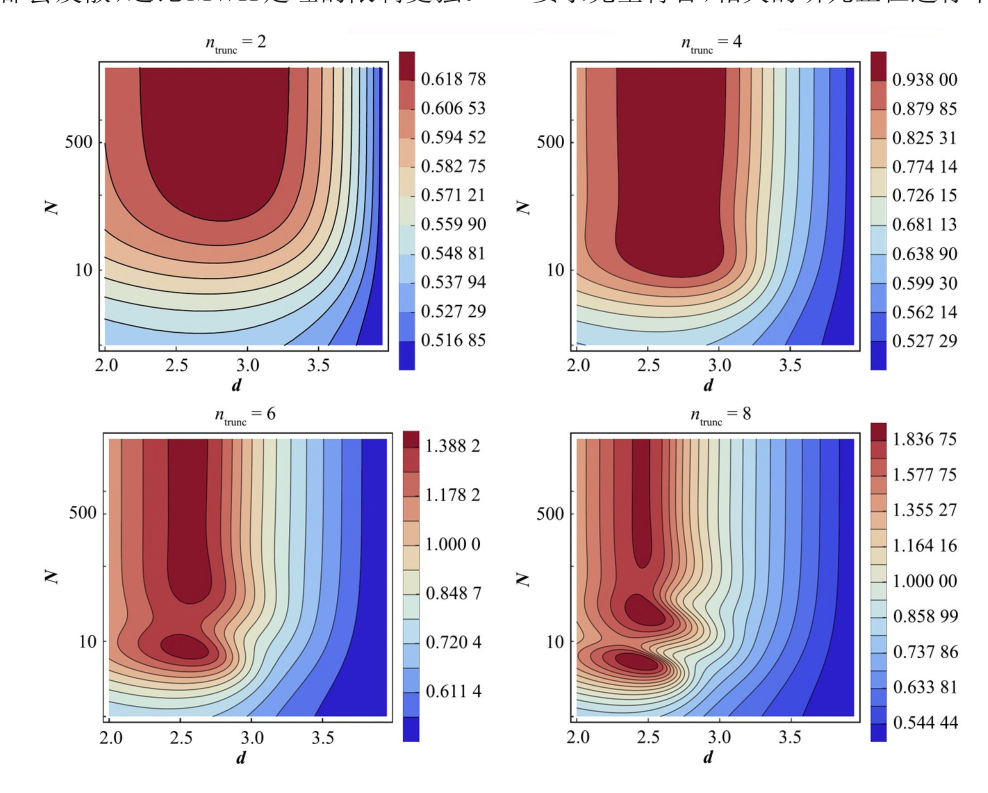


图5 不同展开阶数情况下计算得到的临界指数 ν 随空间维数 d 和对称群参数 N 的变化

Fig.5 2D plot of the critical exponent ν as functions of the spatial dimension d and the symmetry N calculated with different values of the expansion order n_{trunc}

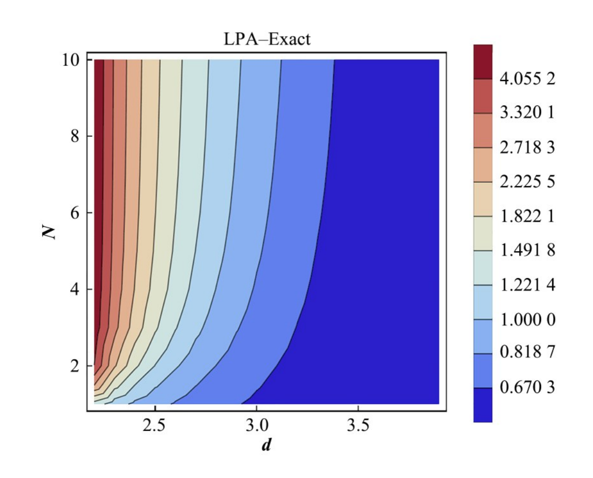


图6 LPA近似下，临界指数 ν 的精确结果及其随空间维数 d 和对称群参数 N 的依赖行为

Fig.6 Exact results of the critical exponent ν as functions of the spatial dimension d and the symmetry N with the truncation LPA

6 重子数涨落

我们讨论在相对论重离子碰撞实验中与临界现象密切相关的涨落测量，这也是实验中寻找QCD临界终点(CEP)的主要手段之一。QCD的临界终点是属于 $Z(2)$ 对称性普适类的二级相变，也就是伊辛普适类。涨落随关联长度的幂次随涨落的阶次增加而增大，因此越高阶的涨落对临界现象越敏感。美国布鲁克海文国家实验室相对论重离子碰撞实验(RHIC)束流能量扫描项目(BES)期待着利用守恒荷(包括重子数或者净质子数、电荷以及奇异数等)的高阶涨落及其对碰撞能量的非单调依赖性来寻找QCD相图上的CEP，在BES第一阶段的实验中取得了很多重要的成果[41−48]。

为解释这些实验数据，并且将实验测量与QCD相变以及CEP联系起来，涨落的理论计算与预言也必不可少。近年来，涨落的理论研究和计算也取得了很多重要的进展，譬如关于涨落的格点QCD计算可参考文献[73−79]，fRG框架下低能有效模型(Low Energy Effective Theory，LEFT)的研究可参考文献[80−92]，相对论平均场可参考文献[93−97]，Dyson-Schwinger方程[98−99]。特别是近年来在fRG的框架将低能有效模型与第一性原理QCD相结合，构建了QCD辅助的低能有效理论(QCD-assisted

LEFTs)，并且在此理论框架下研究了重子数分布的偏斜度和峰度[84-86]，重子-奇异数关联[88-89]，超高阶重子数的涨落[92]。

6.1 QCD辅助的低能有效模型下的重子数涨落

利用QCD辅助的低能有效理论计算重子数的涨落，并且将计算的结果与实验数据进行比较。Polyakov夸克介子(Polyakov-Quark-Meson，PQM)模型非常适合用来计算QCD的热力学量。PQM模型中包含了夸克自由度以及σ介子、π介子的自由度。这里只加入了标量和赝标量介子，因为这两个介子的真空质量最轻，在描述手征对称性的自发破缺与恢复中起到了决定性的作用，其他质量更重的介子的作用都可以视为次领头阶的贡献。在夸克介子模型的基础上我们加入了Polyakov圈的贡献，以引入夸克禁闭与退禁闭的信息。这样就可以给出低能有效模型的有效作用量：

$$\Gamma_k = \int_x \{ Z_{q,k}\bar{q}[\gamma_\mu\partial_\mu - \gamma_0(\mu + igA_0)]q + \frac{1}{2}Z_{\phi,k}(\partial_\mu\phi)^2 + h_k\bar{q}(\tau^0\sigma + \tau\cdot\pi)q + V_k(\rho,A_0) - c\sigma \} \tag{57}$$

等号右边第一部分为夸克的运动学项，q和$\bar{q}$分别代表正反夸克场，$Z_{q,k}$为夸克的波函数重整化常数，γ_μ为狄拉克矩阵，μ是夸克化学势矩阵，A_0为胶子背景场；第二项是介子运动学项，$Z_{\phi,k}$为介子波函数重整化常数，ϕ是介子场；第三项是夸克介子相互作用项，h_k是夸克介子之间的Yukawa相互作用强度，$\tau = 1/2\left(1, i\gamma_5\sigma\right)$，σ和π分别为两种介子的场；最后的两项分别为介子有效势和线性破缺项，其中$\rho = 1/2\,\phi^2$。

在上面所介绍的低能有效模型的计算中，假设研究的体系是一个巨正则系综。根据巨正则系综的基本定义，我们的体系具有确定的体积和温度并且可以与外热源交换粒子和能量。这也就是为什么我们的标度依赖的有效作用量中引入了费米子的化学势。在巨正则系综的框架下，热力学量的计算可以归结为巨热力学势的计算。对于处于热平衡的均匀系统，容易得到巨热力学势密度可以表示成红外极限$k\to\infty$下胶子势、介子有效势和线性破缺项的和：

$$\Omega[T,\mu_{\rm B}] = V_{\rm glue}(L,\bar{L}) + V_{\rm mat}(\rho,L,\bar{L}) - c\sigma \tag{58}$$

当对fRG流方程求解至红外后就可以得到式(58)中的各部分，并最终求得巨热力学势密度。此时的巨热力学势密度依赖于温度与重子化学势，也就是说体系的热力学性质都包含在其中。在此基础上根据巨正则系综的性质，可以直接得到所研究体系的压强：

$$p = -\Omega[T,\mu_{\rm B}] \tag{59}$$

如果是要计算QCD体系的状态方程，可以计算压强对温度的导数，从而得到体系的熵等热力学量，此处不过多赘述，下面主要讨论重子数涨落的计算。

根据巨正则系综的性质，粒子数的涨落可以通过求压强对化学势的各阶导数得到。在不考虑电荷和奇异数化学势的情况下，重子化学势可以表示为三倍的夸克化学势$\mu_{\rm B} = 3\mu$。在此基础上，可以得到无量纲的重子数涨落，也就是广义磁化率：

$$\chi_n^B = \frac{\partial^n}{\partial(\mu_{\rm B}/T)^n}\frac{p}{T^4} \tag{60}$$

通过求解fRG流方程得到不同温度和化学势情况下的压强，然后通过数值微分计算不同阶数的重子数涨落。原则上讲，只要拥有足够精确的压强数据，就可以对任意阶的重子数涨落进行计算，但是受限于计算精度，计算只能给出有限阶的重子数涨落，目前的数值方法可以计算到第十阶的重子数涨落。

计算得到的各阶重子数涨落还不能直接和实验数据作对比，因为实验数据直接给出的是不同对撞能量下粒子数的分布，通过其数据可以计算出该分布下的各阶累积量，而累积量与广义磁化率之间还相差一个体积V的因子，如下所示：

$$\begin{aligned}\chi_1^B &= \frac{1}{VT^3} < N_B > \\ \chi_2^B &= \frac{1}{VT^3} < (\delta N_B)^2 > \\ \chi_3^B &= \frac{1}{VT^3} < (\delta N_B)^3 > \\ \chi_4^B &= \frac{1}{VT^3}\left(< (\delta N_B)^4 > - 3 < (\delta N_B)^2 >^2 \right)\end{aligned} \tag{61}$$

这里给出了从第一到第四阶涨落与广义磁化率的关系。其中$\langle\ \rangle$代表统计平均，$\delta N_B = N_B - \langle N_B\rangle$。所以，实际上不可以直接将计算得到的广义磁化率与实验的累积量进行对比。为了消除体积因子的影响，可以将广义磁化率的比值与累积量的比值进行比较，譬如：偏度$S\sigma = \chi_3^B/\chi_2^B$，峰度$\kappa\sigma^2 = \chi_4^B/\chi_2^B$。

6.2 零化学势下的重子数涨落

图7给出了零化学势下重子数涨落的比值$R_{42}^B = \chi_4^B/\chi_2^B$、$R_{62}^B = \chi_6^B/\chi_2^B$和$R_{82}^B = \chi_8^B/\chi_2^B$随温度的变化行为，并且与格点QCD计算的结果进行比较。图7中的红带给出了fRG低能有效理论计算得到的结果，绿带和蓝带给出的是格点HotQCD合作组所计算的结果[77-78,100]，蓝色误差棒给出的是格点WB合作组计算的结果[79]，品红色虚线给出的是强子共振气体模型所给出的结果[101]。这里fRG结果中的误差带源自于对温度的重定标。由于低能有效理论与第一性

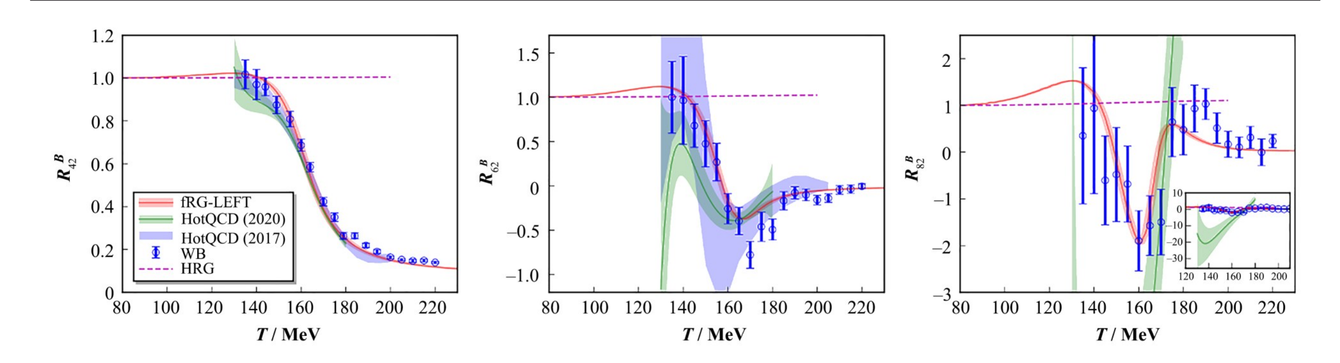


图7　零化学势下重子数涨落的比值$R_{42}^B=\chi_4^B/\chi_2^B$、$R_{62}^B=\chi_6^B/\chi_2^B$和$R_{82}^B=\chi_8^B/\chi_2^B$随温度的变化行为，并且与格点QCD计算的结果进行比较[92]

Fig.7　$R_{42}^B=\chi_4^B/\chi_2^B$, $R_{62}^B=\chi_6^B/\chi_2^B$ and $R_{82}^B=\chi_8^B/\chi_2^B$ as functions of the temperature at vanishing baryon chemical potential ($\mu_B=0$) in comparison with lattice results[92]

原理QCD的计算存在温度与化学势的标度差异，所以引入了两个线性重定标系数：

$$T_c^{\rm LEFT}=c_T T_c^{\rm QCD},\ \mu_B^{\rm LEFT}=c_\mu \mu_B^{\rm QCD} \tag{62}$$

为了确定这两个系数的值，在零化学势下将有效理论的结果与WB（Wuppertal-Budapest）合作组的格点QCD结果在赝临界温度处进行匹配。由于格点QCD的计算存在误差，这就导致了温度重定标系数也会存在相应的误差。对于化学势重定标系数，这可以通过有限化学势情况下匹配相边界的曲率来确定。也就是式（63）中的平方项的曲率系数：

$$\frac{T_c(\mu_B)}{T_c}=1-\kappa\left(\frac{\mu_B}{T_c}\right)^2+\lambda\left(\frac{\mu_B}{T_c}\right)^4+\cdots \tag{63}$$

这里$T_c(\mu_B)$表示重子化学势为μ_B时的赝临界温度，其中$T_c=T_c(\mu_B=0)$。采用文献[102]中的相边界曲率数值$\kappa=0.015\,3(18)$，经过上面所讨论的匹配过程，可以得到两个重定标系数$c_T=1.247(12)$和$c_\mu=1.110(66)$，这两个系数的误差是fRG有限温度有限化学势下计算结果的误差来源。

从图7可以看到，经过重新定标之后的重子数涨落从四阶到八阶都与格点QCD的计算结果符合得很好。但需要注意是，这里引入线性重定标系数的方法是最简单、最初步地将低能有效理论与第一性原理QCD进行联系的方法。之所以采用低能有效理论来计算，是因为其简单的结构能够相对准确地刻画整个手征对称性破缺与恢复的过程。当然，结构简单的代价是缺失了高能标处规范场自由度所带来的动力学效应，所以更合理的方法是在fRG-QCD的框架下[12]计算涨落等观测量，相关的工作正在进行中。在下节中可以很自然地将本节零化学势的计算拓展到有限化学势的区域。

6.3　有限化学势下的重子数涨落

在重离子碰撞实验中，对撞能量的降低往往标志着体系密度的增大，也就对应着体系化学势的增加，所以，有限化学势的计算结果对低碰撞能量的实验有重要的意义。图8给出了化学势取0~400 MeV情况下的重子数涨落随温度的依赖关系，这里重子化学势取了如下若干数值：μ_B为0 MeV、100 MeV、160 MeV、200 MeV、300 MeV和400 MeV。涨落随着化学势升高的行为一目了然：各阶的涨落都在较高的化学势下产生了更大幅度的波动。此外，随着化学势的增大，涨落在高于相变温度的区域也会产生一个新的峰。当然，涨落的阶数越高，在高化学势下的峰值（谷值）会变得越大（越小），甚至R_{82}^B在化学势为400 MeV时的峰值能够达到2 000左右。可以注意到，无论化学势的大小，在低温区域总是有$R_{n2}^B=1$，这是由于在低温区域净重子数的分布趋向于Skellam分布。在极端高温区域，由于QCD渐近自由的性质，夸克和胶子之间的相互作用逐渐趋于消失，此时涨落的取值也逐渐趋于Stefan-Boltzmann极限，有$R_{n2}^B(n>4)\to 0$。

同时也容易注意到，当化学势增大时，计算所产生的误差也迅速增加，可以看到，在高阶的涨落中高化学势的误差几乎填满了曲线所在的区域。这说明在零化学势下，很小的不确定性会导致高化学势下明显的误差，这导致在高化学势下的预言具有很大的不确定性，所以，今后的一个重要目标是尽量减小高化学势下计算的误差，提高理论预言的可靠性。

除了温度与化学势的重定标系数所引入的误差以外，低能有效理论的截断也会带来相应的误差。从前面给出的夸克介子模型有效作用量可以看到，目前只考虑了两味轻夸克以及标量赝标介子对相变的贡献，实际还有其它相互作用道的贡献。尤其是随着化学势的升高，矢量介子以及di-quark凝聚等效应都会对体系的相变行为产生一些无法忽略的影响，而这些影响显然是现有的体系所没有考虑的。所以目前在高化学势区域进行的计算以及得到的一

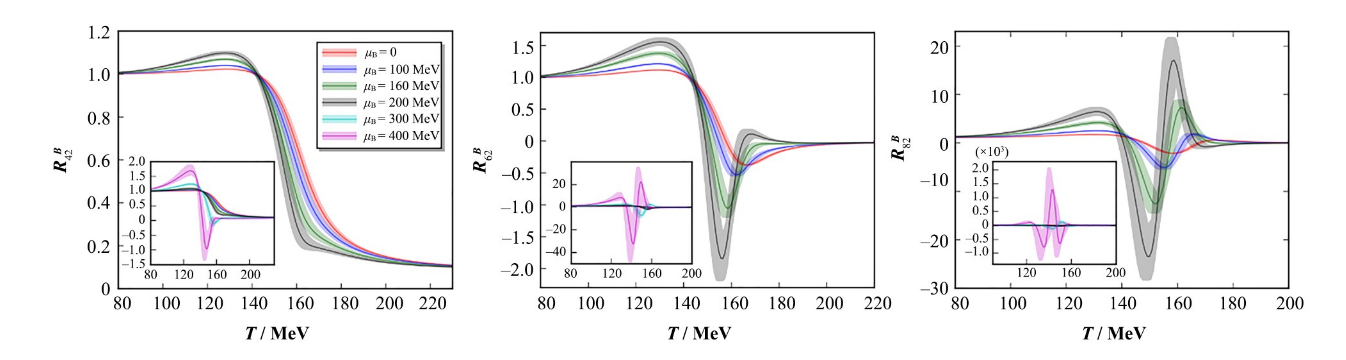


图8 化学势取0~400 MeV不同数值情况下的重子数涨落随温度的依赖关系，从左至右的子图分别对应着R^B_{42}、R^B_{62}和R^B_{82}[92]
Fig.8 R^B_{42}, R^B_{62} and R^B_{82} as functions of the temperature with different values of μ_B in the range of 0~400 MeV[92]

些结论还需要谨慎对待。所以目前在有限化学势的计算暂时限制在实验数据所覆盖的范围内，也就是对撞能量在$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7~200 GeV的范围，对应的化学势约在μ_B = 20~400 MeV的范围。对于更高化学势区域涨落的计算，需要进一步改进低能有效理论的截断，在其中引入更多第一性原理QCD计算的信息，相关的工作正在进行中。

相对论重离子碰撞实验中核核对撞产生的火球，经过热化形成强关联的夸克胶子等离子体(strongly interacting Quark-Gluon Plasma，sQGP)，sQGP具有近乎完美的理想流体行为[103]。随着sQGP的膨胀及其演化，温度不断降低，碎裂成各种各样的强子，从而实现从QGP相到强子相的演化，但是，此时强子之间还存在非弹性相互作用，强子的种类还不断转化。随着体系的进一步演化，非弹性相互作用消失，强子的种类不再发生变化，这一时刻所对应的过程有一个专有名称，被称为化学冻结。对应不同的碰撞能量，化学冻结时刻对应的温度和化学势通常是不同的。显然，实验测量的涨落信号主要受到化学冻结时刻体系的状态所影响，如果我们进一步忽略非平衡演化、整体重子数守恒等效应的潜在影响，那么，只要我们在不同对撞能量所对应的化学冻结的温度和重子化学势上计算相应的涨落，就可以和实验测量进行比较。这里化学冻结的温度和重子化学势对碰撞能量的依赖关系所给出的曲线就是化学冻结曲线。

图9给出了LHC和RHIC等实验得到的一些化学冻结温度和重子化学势的实验数据点以及若干所使用的化学冻结曲线。蓝色五角形综合了各个能量区间的加速器实验所得到的化学冻结实验数据[7]，红色圆圈代表STAR合作组得到的化学冻结数据[104]，左下角的小图放大了化学势0~450 MeV的子区间。图9中的蓝色虚线是Andronic等拟合的一条化学冻结曲线[7]。它的参数化形式可以写为：

$$\mu_{B_{CF}} = \frac{a}{1 + 0.288\sqrt{s_{NN}}},$$
$$T_{CF} = \frac{T^{(0)}_{CF}}{1 + \exp(2.60 - \ln(\sqrt{s_{NN}})/0.45)} \tag{64}$$

其中：a = 1 307.5 MeV, $T^{(0)}_{CF}$ = 158.4 MeV；$\sqrt{s_{NN}}$代表实验数据点所对应的核子对质心能量，GeV。图9中的红色实线是应用与上面相同的参数化形式到STAR数据点上进行重新拟合的曲线。这里用了STAR实验所给出的全部7个数据点来重新确定式(64)中的各个参数。对于STAR合作组的化学冻结数据，考虑到一些一般性的要求，譬如化学冻结温度随化学冻结化学势的增加而减小，冻出曲线的凸凹性质等，前两个数据点以及最后一个数据点明显有一些偏差，因此，更合理的是舍弃这些不合理的数据点重新进行拟合，这样就得到了图9中第三条化学冻结曲线——绿色点线。

图10给出了温度与重子化学势相图上计算得到的四阶与二阶涨落的比R^B_{42}，此外，图10还给出了第三条化学冻结曲线，命名为STAR Fit II。可以清

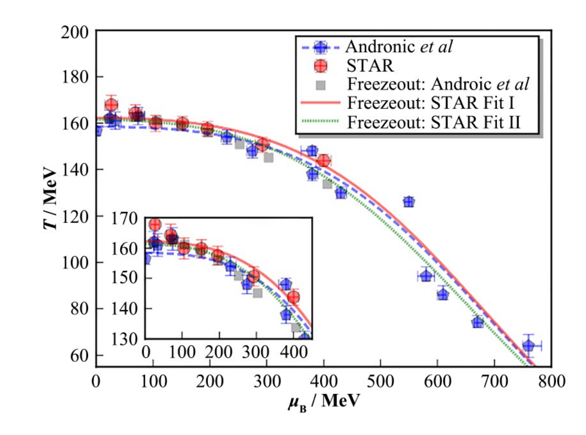


图9 温度与化学势平面上的化学冻结曲线以及Andronic等和STAR合作组给出的化学冻结实验数据点[92]
Fig.9 Chemical freeze-out temperature and baryon chemical potential in the T - μ_B plane. The blue pentagons and red circles show the freeze-out data from Andronic *et al* and STAR experiment, respectively[92]

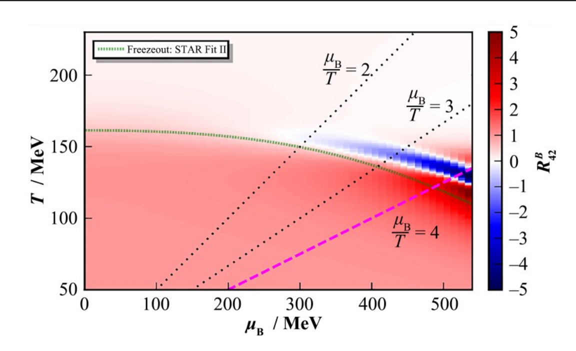


图10 温度与化学势平面上的R_{42}^B，图中还给出了第三条化学冻结曲线，命名为STAR Fit II[92]
Fig.10 Baryon number fluctuations R_{42}^B in the T - μ_B plane as well as the freeze-out curve: STAR Fit II[92]

楚地看到，随着化学势的增加R_{42}^B逐渐产生更加剧烈的波动，在略微高于相变温度的区域产生了负值的谷，这同样也可以从图8中看出来。将冻出曲线画在R_{42}^B的相图上，可以看到，冻出曲线所经过的区域，它首先靠近了红蓝交界的白色区域然后又弯下来进入了深红色区域。这样的行为如果转换到涨落随化学势的变化图中就能够看到一个随化学势的非单调行为。

图11给出了重子数涨落R_{42}^B、R_{62}^B和R_{82}^B随对撞能量的变化行为。其中，左边两条误差带所展示的结果对应着我们在图9中所采用的前两种冻出曲线的方案。灰色误差带对应参数化的冻出曲线，红色误差带对应拟合STAR数据的冻出曲线，误差棒代表实验得到的净质子数涨落的数据。右边给出的结果是使用了第三条化学冻结曲线：STAR Fit II。在图的下坐标轴给出了实验数据所对应的对撞能量，上坐标轴给出了对应的重子化学势。对于R_{42}^B随对撞能量变化的行为，对于三种不同的化学冻结曲线，都发现随着碰撞能量的降低，R_{42}^B先减少后增加，存在一个非单调性，这与实验结果是一致的。这种非单调性的来源是随着对撞能量的降低，冻出化学势越来越大，连续过渡的激烈程度越来越强，这样就导致了R_{42}^B的减少，明显偏离Skellam分布的数值，但是随着化学势的进一步增加，化学冻结曲线开始偏离相边界，如图10所示，这样使得R_{42}^B进入了一个使其数值明显增加的区域。对于六阶涨落，理论计算发现R_{62}^B在很大的能量区间是负值，这与实验的其中两个数据点是定性符合的，但是很显然需要更多的统计量。图11也给出了八阶涨落R_{82}^B的理论预言，但是需要注意的是，R_{82}^B的误差是很明显的，特别是低能区域。

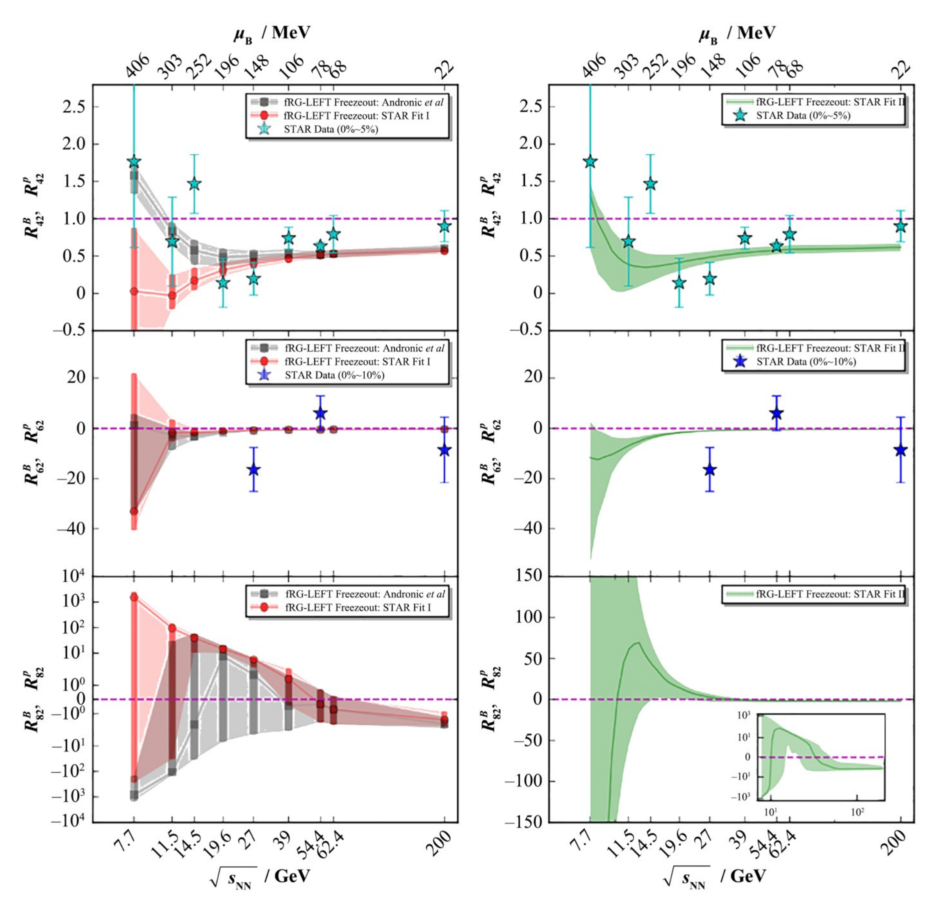


图11 QCD辅助的低能有效理论所计算的R_{42}^B、R_{62}^B和R_{82}^B随对撞能量的变化行为[92]
Fig.11 Baryon number fluctuations R_{42}^B, R_{62}^B and R_{82}^B as functions of the collision energy obtained in QCD-assisted LEFT in comparison to the STAR data[92]

7 结语

本文主要介绍了近年来fRG在QCD相变及其临界现象研究中的一些进展，主要侧重于与QCD的CEP相关的非微扰临界指数的计算、重子数的涨落等。fRG是一种非微扰连续场论的理论方法，它提供了一种非常适合推导重整化群流方程的、系统的理论框架。fRG既可以用来做系统的展开，譬如梯度展开、$\varepsilon = 4 - d$展开等，也可以用于非微扰场论的计算。

首先，介绍了应用fRG研究d维$O(N)$标量理论临界行为的一些重要进展。利用fRG很容易得到$O(N)$标量理论非微扰有效势的流方程。这个非微扰有效势的流方程及其固定点方程的求解，对于研究二级相变的临界行为至关重要。一方面，可以利用有效势泰勒展开的方法对其展开系数的流方程逐一求解，这同Wilson等早年发展的$\varepsilon = 4 - d$展开的方法在本质上是一致的。在fRG的框架下，系统地推导且重复了临界指数ε展开在$O(\varepsilon)$阶的结果，原则上也可以做高阶的计算，这将会是以后发展的一个方向，相应的研究具有很重要的理论意义，因为fRG提供了一个可以简化高阶计算的理论框架，反过来，ε展开的微扰研究也可以促进对非微扰固定点方程数学结构的认识。值得注意的是，最近发展了一种不依赖于微扰展开，直接求解非微扰固定点方程非局域势的方法，该方法通过解析形式考虑了有效势在大场极限情况下的渐近行为，这对于求解空间维数$d \to 2$的临界行为至关重要，也是保证MWH定理成立的关键。这种非局域势直接求解的方法具有广阔的应用前景，譬如动力学临界指数的计算[105]、多固定点的研究[106]、Yang-Lee边缘奇点[107-111]等。

此外，还讨论了与QCD的临界终点等临界现象密切相关的重子数的涨落，这是相对论重离子碰撞实验探寻CEP的主要观测量。基于fRG的理论计算，探讨了实验观测到的净质子数分布的峰度，也就是四阶矩随碰撞能量非单调依赖关系的可能原因：一方面，随着碰撞能量的减小，化学冻结重子化学势不断增加，导致QCD相图上的手征连续过渡越来越剧烈，涨落的幅度越来越大；另一方面，化学冻结曲线在高化学势的区域越来越往低温的方向偏离相边界曲线。为了最终确定CEP在QCD相图上的位置，不仅需要不断降低高化学势区域理论计算的误差，比如CEP位置的理论预言、涨落的计算等等，而且也需要实验提供更多的，特别是高化学势区域的化学冻结数据。

致谢 感谢北京大学刘玉鑫教授、复旦大学马余刚院士、华中师范大学罗晓峰教授的邀请和鼓励，使得这篇综述得以顺利完成！此外，感谢我们多年来的合作者：Jens Braun，Jan M. Pawlowski，Fabian Rennecke，Bernd-Jochen Schaefer，Nicolas Wink，陈永睿，黄闯，刘玉鑫，罗晓峰，马国亮，温睿。

作者贡献声明 尹诗计算并撰写文章的重子数涨落部分，修改文章；谈阳阳计算并撰写文章临界指数部分，文章排版；付伟杰撰写文章引言以及理论介绍部分，指导修改文章。

参考文献

1 Luo X F, Wang Q, Xu N, *et al*. Properties of QCD matter at high baryon density[M]. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. DOI: 10.1007/978-981-19-4441-3.

2 吴善进, 宋慧超. QCD临界点附近的动力学临界涨落[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

WU Shanjin, SONG Huichao. Critical dynamical fluctuations near the QCD critical point[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

3 许坤, 黄梅. QCD临界终点与重子数扰动[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040005.

XU Kun, HUANG Mei. QCD critical end point and baryon number fluctuation[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs. 46.040005.

4 张宇, 张定伟, 罗晓峰. 相对论重离子碰撞中QCD相图的实验研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040001. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040001.

ZHANG Yu, ZHANG Dingwei, LUO Xiaofeng. Experimental study of the QCD phase diagram in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040001. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040001.

5 杜轶伦, 李程明, 史潮, 等. 基于有效场论的QCD相图研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040009. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040009.

DU Yilun, LI Chengming, SHI Chao, *et al*. Review of QCD phase diagram analysis using effective field theories [J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040009. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040009.

6 Aoki Y, Endrodi G, Fodor Z, *et al*. The order of the

quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics[J]. Nature, 2006, **443** (7112): 675 - 678. DOI: 10.1038/nature05120.

7 Andronic A, Braun-Munzinger P, Redlich K, *et al*. Decoding the phase structure of QCD via particle production at high energy[J]. Nature, 2018, **561**(7723): 321 - 330. DOI: 10.1038/s41586-018-0491-6.

8 Borsanyi S, fodor Z, Giordano M, *et al*. Equation of state of a hot-and-dense quark gluon plasma: lattice simulations at real μ_B vs. extrapolations[J]. 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.05398.

9 Borsányi S, Fodor Z, Guenther J N, *et al*. Lattice QCD equation of state at finite chemical potential from an alternative expansion scheme[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(23): 232001. DOI: 10.1103/physrevlett. 126. 232001.

10 Bollweg D, Goswami J, Kaczmarek O, *et al*. Taylor expansions and Padé approximants for cumulants of conserved charge fluctuations at nonvanishing chemical potentials[J]. Physical Review D, 2022, **105**(7): 074511. DOI: 10.1103/physrevd.105.074511.

11 Fischer C S. QCD at finite temperature and chemical potential from Dyson-Schwinger equations[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2019, **105**: 1 - 60. DOI: 10. 1016/j.ppnp.2019.01.002.

12 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F. QCD phase structure at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2020, **101**(5): 054032. DOI: 10.1103/ physrevd.101.054032.

13 Gao F, Pawlowski J M. Chiral phase structure and critical end point in QCD[J]. Physics Letters B, 2021, **820**: 136584. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136584.

14 Gunkel P J, Fischer C S. Locating the critical endpoint of QCD: Mesonic backcoupling effects[J]. Physical Review D, 2021, **104**(5): 054022. DOI: 10.1103/physrevd. 104. 054022.

15 Fu W J. QCD at finite temperature and density within the fRG approach: an overview[J]. Communications in Theoretical Physics, 2022, **74**(9): 097304. DOI: 10.1088/ 1572-9494/ac86be.

16 Schaefer B J, Wambach J. The phase diagram of the quark-meson model[J]. Nuclear Physics A, 2005, **757**(3 - 4): 479 - 492. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.04.012.

17 Fukushima K, Skokov V. Polyakov loop modeling for hot QCD[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2017, **96**: 154 - 199. DOI: 10.1016/j.ppnp.2017.05.002.

18 Chen Y R, Wen R, Fu W J. Critical behaviors of the $O(4)$ and $Z(2)$ symmetries in the QCD phase diagram[J]. Physical Review D, 2021, **104**(5): 054009. DOI: 10.1103/ physrevd.104.054009.

19 Grossi E, Ihssen F J, Pawlowski J M, *et al*. Shocks and quark-meson scatterings at large density[J]. Physical Review D, 2021, **104**: 016028. DOI: 10.1103/physrevd. 104.016028.

20 Otto K, Busch C, Schaefer B J. Regulator scheme dependence of the chiral phase transition at high densities [J]. Physical Review D, 2022, **106**(9): 094018. DOI: 10.1103/physrevd.106.094018.

21 Ma S G. Modern theory of critical phenomena[M]. Cambridge, Mass: Perseus Publishing, 2000.

22 Wilson K G. Renormalization group and critical phenomena. I. renormalization group and the kadanoff scaling picture[J]. Physical Review B, 1971, **4**(9): 3174 - 3183. DOI: 10.1103/physrevb.4.3174.

23 Wilson K G. Renormalization group and critical phenomena. II. phase-space cell analysis of critical behavior[J]. Physical Review B, 1971, **4**(9): 3184 - 3205. DOI: 10.1103/physrevb.4.3184.

24 Wilson K G, Fisher M E. Critical exponents in 3.99 dimensions[J]. Physical Review Letters, 1972, **28**(4): 240 - 243. DOI: 10.1103/physrevlett.28.240.

25 Wilson K. The renormalization group and the ε expansion [J]. Physics Reports, 1974, **12**(2): 75 - 199. DOI: 10.1016/ 0370-1573(74)90023-4.

26 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

27 Bzdak A, Esumi S, Koch V, *et al*. Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan[J]. Physics Reports, 2020, **853**: 1 - 87. DOI: 10.1016/j. physrep.2020.01.005.

28 Friman B, Höhne C, Knoll J, *et al*. The CBM physics book: compressed baryonic matter in laboratory experiments[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-13293-3.

29 Agakishiev G, Balanda A, Bannier B, *et al*. The high-acceptance dielectron spectrometer HADES[J]. European Physical Journal, 2009, **A41**: 243 - 277. DOI: 10.1140/ epja/i2009-10807-5.

30 Abgrall N, Andreeva O, Aduszkiewicz A, *et al*. NA61/

SHINE facility at the CERN SPS: beams and detector system[J]. JINST, 2014, **9**: P06005. DOI: 10.1088/1748-0221/9/06/P06005.

31 Sorin A, Kekelidze V, Kovalenko A, *et al*. Heavy-ion program at NICA/MPD at JINR[J]. Nuclear Physics A, 2011, **855**(1): 510 – 513. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2011.02.118.

32 Blaschke D, Aichelin J, Bratkovskaya E, *et al*. Topical issue on exploring strongly interacting matter at high densities - NICA white paper[J]. The European Physical Journal A, 2016, **52**(8): 267. DOI: 10.1140/epja/i2016-16267-x.

33 Dainese A, Diehl M, Di Nezza P, *et al*. Physics beyond colliders: QCD working group report[EB/OL]. 2019: arXiv: 1901.04482. https://arxiv.org/abs/1901.04482.

34 Yang J C, Xia J W, Xiao G Q, *et al*. High Intensity heavy ion Accelerator Facility (HIAF) in China[J/OL]. Nuclear Instruments & Methods, 2013, **B317**: 263 – 265. DOI: 10.1016/j.nimb. 2013.08.046.

35 Lü L M, Yi H, Xiao Z G, *et al*. Conceptual design of the HIRFL-CSR external-target experiment[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2017, **60**(1): 012021. DOI: 10.1007/s11433-016-0342-x.

36 Sakaguchi T. Study of high baryon density QCD matter at J-PARC-HI[J]. Nuclear Physics A, 2017, **967**: 896 – 899. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2017.05.081.

37 Sako H. Studies of extremely dense matter in heavy-ion collisions at J-PARC[J]. Nuclear Physics A, 2019, **982**: 959 – 962. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2018.11.027.

38 Stephanov M A, Rajagopal K, Shuryak E V. Event-by-event fluctuations in heavy ion collisions and the QCD critical point[J]. Physical Review D, 1999, **60**(11): 114028. DOI: 10.1103/physrevd.60.114028.

39 Stephanov M A. Non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2009, **102**(3): 032301. DOI: 10.1103/physrevlett.102.032301.

40 Stephanov M A. Sign of kurtosis near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(5): 052301. DOI: 10.1103/physrevlett.107.052301.

41 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Energy dependence of moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **112**: 032302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.032302.

42 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Beam energy dependence of moments of the net-charge multiplicity distributions in Au+Au collisions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**: 092301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.092301.

43 Luo X. Energy dependence of moments of net-proton and net-charge multiplicity distributions at STAR[J]. PoS, 2015, CPOD2014: 019.

44 Adamczyk L, OTHERS. Collision energy dependence of moments of net-kaon multiplicity distributions at RHIC [J]. Physics Letters, 2018, **B785**: 551 – 560. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.07.066.

45 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Collision-energy dependence of second-order off-diagonal and diagonal cumulants of net-charge, net-proton, and net-kaon multiplicity distributions in Au+Au collisions[J]. Physical Review C, 2019, **100**(1): 014902. DOI: 10.1103/PhysRevC.100.014902.

46 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Nonmonotonic energy dependence of net-proton number fluctuations[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(9): 092301. DOI: 10.1103/physrevlett.126.092301.

47 Abdallah M, Adam J, Adamczyk L, *et al*. Measurement of the sixth-order cumulant of net-proton multiplicity distributions in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$= 27, 54.4, and 200 GeV at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2021, **127**(26): 262301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.262301.

48 Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, *et al*. Measurements of proton high-order cumulants in $\sqrt{S_{\mathrm{NN}}}$=3 GeV Au+Au collisions and implications for the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2022, **128**(20): 202303. DOI: 10.1103/physrevlett.128.202303.

49 Karsch F. Critical behavior and net-charge fluctuations from lattice QCD[J]. PoS, 2019, CORFU2018: 163. DOI: 10.22323/1.347.0163.

50 Wetterich C. Exact evolution equation for the effective potential[J]. Physics Letters B, 1993, **301**(1): 90 – 94. DOI: 10.1016/0370-2693(93)90726-x.

51 Berges J, Tetradis N, Wetterich C. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics[J]. Physics Reports, 2002, **363**(4 – 6): 223 – 386. DOI: 10.1016/s0370-1573(01)00098-9.

52 Pawlowski J M. Aspects of the functional renormalisation group[J]. Annals of Physics, 2007, **322**(12): 2831 – 2915. DOI: 10.1016/j.aop.2007.01.007.

53 Schaefer B J, Wambach J. Renormalization group approach towards the QCD phase diagram[J]. Physics of Particles and Nuclei, 2008, **39**(7): 1025 – 1032. DOI:

10.1134/S1063779608070083.

54 Gies H. Introduction to the functional RG and applications to gauge theories[J]. Lecture Notes in Physics, 2012, **852**: 287 – 348. DOI: 10.1007/978-3-642-27320-9_6.

55 Rosten O J. Fundamentals of the exact renormalization group[J]. Physics Reports, 2012, **511**(4): 177 – 272. DOI: 10.1016/j.physrep.2011.12.003.

56 Braun J. Fermion interactions and universal behavior in strongly interacting theories[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2012, **39**(3): 033001. DOI: 10.1088/0954-3899/39/3/033001.

57 Pawlowski J M. Equation of state and phase diagram of strongly interacting matter[J]. Nuclear Physics A, 2014, **931**: 113 – 124. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2014.09.074.

58 Dupuis N, Canet L, Eichhorn A, *et al*. The nonperturbative functional renormalization group and its applications[J]. Physics Reports, 2021, **910**: 1 – 114. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.01.001.

59 Braun J, Fister L, Pawlowski J M, *et al*. From quarks and gluons to hadrons: Chiral symmetry breaking in dynamical QCD[J]. Physical Review D, 2016, **94**(3): 034016. DOI: 10.1103/physrevd.94.034016.

60 Mitter M, Pawlowski J M, Strodthoff N. Chiral symmetry breaking in continuum QCD[J]. Physical Review D, 2015, **91**(5): 054035. DOI: 10.1103/physrevd.91.054035.

61 Rennecke F. Vacuum structure of vector mesons in QCD [J]. Physical Review D, 2015, **92**(7): 076012. DOI: 10.1103/physrevd.92.076012.

62 Cyrol A K, Fister L, Mitter M, *et al*. Landau gauge Yang-Mills correlation functions[J]. Physical Review D, 2016, **94**(5): 054005. DOI: 10.1103/physrevd.94.054005.

63 Cyrol A K, Mitter M, Pawlowski J M, *et al*. Nonperturbative finite-temperature Yang-Mills theory[J]. Physical Review D, 2018, **97**(5): 054015. DOI: 10.1103/physrevd.97.054015.

64 Cyrol A K, Mitter M, Pawlowski J M, *et al*. Nonperturbative quark, gluon, and meson correlators of unquenched QCD[J]. Physical Review D, 2018, **97**(5): 054006. DOI: 10.1103/physrevd.97.054006.

65 Braun J, Fu W J, Pawlowski J M, *et al*. Chiral susceptibility in (2+1) -flavor QCD[J]. Physical Review D, 2020, **102**(5): 056010. DOI: 10.1103/physrevd. 102.056010.

66 Litim D F. Optimisation of the exact renormalisation group[J]. Physics Letters B, 2000, **486**(1 – 2): 92 – 99. DOI: 10.1016/s0370-2693(00)00748-6.

67 Litim D F. Optimized renormalization group flows[J]. Physical Review D, 2001, **64**(10): 105007. DOI: 10.1103/physrevd.64.105007.

68 Litim D F. Critical exponents from optimised renormalisation group flows[J]. Nuclear Physics B, 2002, **631**(1 – 2): 128 – 158. DOI: 10.1016/s0550-3213(02)00186-4.

69 Mermin N D, Wagner H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models[J]. Physical Review Letters, 1966, **17** (22): 1133 – 1136. DOI: 10.1103/physrevlett.17.1133.

70 Hohenberg P C. Existence of long-range order in one and two dimensions[J]. Physical Review, 1967, **158**(2): 383 – 386. DOI: 10.1103/physrev.158.383.

71 Coleman S R. There are no Goldstone bosons in two dimensions[J]. Communications in Mathematical Physics, 1973, **31**(4): 259 – 264. DOI: 10.1007/BF01646487.

72 Tan Y Y, Huang C, Chen Y R, *et al*. Criticality of the $O(N)$ universality via global solutions to nonperturbative fixed-point equations[EB/OL]. 2022: arXiv: 2211.10249. https://arxiv.org/abs/2211.10249.

73 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. Freeze-out conditions in heavy ion collisions from QCD thermodynamics[J]. Physical Review Letters, 2012, **109** (19): 192302. DOI: 10.1103/physrevlett.109.192302.

74 Borsányi S, Fodor Z, Katz S D, *et al*. Freeze-out parameters: lattice meets experiment[J]. Physical Review Letters, 2013, **111**(6): 062005. DOI: 10.1103/physrevlett.111.062005.

75 Borsanyi S, Fodor Z, Katz S D, *et al*. Freeze-out parameters from electric charge and baryon number fluctuations: is there consistency? [J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(5): 052301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.052301.

76 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. Skewness and kurtosis of net baryon-number distributions at small values of the baryon chemical potential[J]. Physical Review D, 2017, **96**(7): 074510. DOI: 10.1103/physrevd.96.074510.

77 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. QCD equation of state to $O(\mu_B^6)$ from lattice QCD[J]. Physical Review D, 2017, **95**(5): 054504. DOI: 10.1103/physrevd.95.054504.

78 Bazavov A, Bollweg D, Ding H T, *et al*. Skewness, kurtosis, and the fifth and sixth order cumulants of net baryon-number distributions from lattice QCD confront

high-statistics STAR data[J]. Physical Review D, 2020, **101**(7): 074502. DOI: 10.1103/physrevd.101.074502.

79 Borsanyi S, Fodor Z, Guenther J N, *et al*. Higher order fluctuations and correlations of conserved charges from lattice QCD[J]. Journal of High Energy Physics, 2018, **2018**(10): 205. DOI: 10.1007/JHEP10(2018)205.

80 Skokov V, Stokić B, Friman B, *et al*. Meson fluctuations and thermodynamics of the Polyakov-loop-extended quark-meson model[J]. Physical Review C, 2010, **82**: 015206. DOI: 10.1103/physrevc.82.015206.

81 Skokov V, Friman B, Redlich K. Quark number fluctuations in the Polyakov loop-extended quark-meson model at finite baryon density[J]. Physical Review C, 2011, **83**(5): 054904. DOI: 10.1103/physrevc.83.054904.

82 Friman B, Karsch F, Redlich K, *et al*. Fluctuations as probe of the QCD phase transition and freeze-out in heavy ion collisions at LHC and RHIC[J]. The European Physical Journal C, 2011, **71**(7): 1694. DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1694-2.

83 Morita K, Friman B, Redlich K. Criticality of the net-baryon number probability distribution at finite density[J]. Physics Letters B, 2015, **741**: 178 – 183. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.12.037.

84 Fu W J, Pawlowski J M. Relevance of matter and glue dynamics for baryon number fluctuations[J]. Physical Review D, 2015, **92**(11): 116006. DOI: 10.1103/physrevd.92.116006.

85 Fu W J, Pawlowski J M. Correlating the skewness and kurtosis of baryon number distributions[J]. Physical Review D, 2016, **93**(9): 091501. DOI: 10.1103/physrevd.93.091501.

86 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F, *et al*. Baryon number fluctuations at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2016, **94**(11): 116020. DOI: 10.1103/physrevd.94.116020.

87 Almási G A, Friman B, Redlich K. Baryon number fluctuations in chiral effective models and their phenomenological implications[J]. Physical Review D, 2017, **96**(1): 014027. DOI: 10.1103/physrevd.96.014027.

88 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F. Strangeness neutrality and QCD thermodynamics[J]. SciPost Physics Core, 2020, **2**: 2. DOI: 10.21468/scipostphyscore.2.1.002.

89 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F. Strangeness neutrality and baryon-strangeness correlations[J]. Physical Review D, 2019, **100**(11): 111501. DOI: 10.1103/physrevd.100.111501.

90 Wen R, Huang C, Fu W J. Baryon number fluctuations in the 2+1 flavor low energy effective model[J]. Physical Review D, 2019, **99**(9): 094019. DOI: 10.1103/physrevd.99.094019.

91 Wen R, Fu W J. Correlations of conserved charges and QCD phase structure[J]. Chinese Physics C, 2021, **45**(4): 044112. DOI: 10.1088/1674-1137/abe199.

92 Fu W J, Luo X F, Pawlowski J M, *et al*. Hyper-order baryon number fluctuations at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2021, **104**(9): 094047. DOI: 10.1103/physrevd.104.094047.

93 Fu W J, Liu Y X, Wu Y L. Fluctuations and correlations of conserved charges in QCD at finite temperature with effective models[J]. Physical Review D, 2010, **81**: 014028. DOI: 10.1103/physrevd.81.014028.

94 Fu W J, Wu Y L. Fluctuations and correlations of conserved charges near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2010, **82**(7): 074013. DOI: 10.1103/physrevd.82.074013.

95 Karsch F, Schaefer B J, Wagner M, *et al*. Towards finite density QCD with Taylor expansions[J]. Physics Letters B, 2011, **698**(3): 256 – 264. DOI: 10.1016/j. physletb.2011.03.013.

96 Schaefer B J, Wagner M. QCD critical region and higher moments for three-flavor models[J]. Physical Review D, 2012, **85**(3): 034027. DOI: 10.1103/physrevd.85.034027.

97 Li Z B, Xu K, Wang X Y, *et al*. The kurtosis of net baryon number fluctuations from a realistic Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model along the experimental freeze-out line [J]. The European Physical Journal C, 2019, **79**(3): 245. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6703-x.

98 Xin X Y, Qin S X, Liu Y X. Quark number fluctuations at finite temperature and finite chemical potential via the Dyson-Schwinger equation approach[J]. Physical Review D, 2014, **90**(7): 076006. DOI: 10.1103/physrevd. 90.076006.

99 Isserstedt P, Buballa M, Fischer C S, *et al*. Baryon number fluctuations in the QCD phase diagram from Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2019, **100**(7): 074011. DOI: 10.1103/physrevd.100.074011.

100 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. Skewness and kurtosis of net baryon-number distributions at small values of the baryon chemical potential[J]. Physical Review D, 2017, **96**(7): 074510. DOI: 10.1103/physrevd.96.074510.

101 Braun-Munzinger P, Redlich K, Stachel J. Particle

production in heavy ion collisions[M]. Quark-Gluon Plasma 3. Singapore: World Scientific, 2004: 491 – 599. DOI: 10.1142/9789812795533_0008.

102 Borsanyi S, Fodor Z, Guenther J N, *et al*. QCD crossover at finite chemical potential from lattice simulations[J]. Physical Review Letters, 2020, **125**(5): 052001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.052001.

103 Hwa R C, Wang X N. Quark-gluon plasma 3[M]. Singapore: World Scientific, 2004. DOI: 10.1142/5029.

104 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program[J]. Physical Review C, 2017, **96**(4): 044904. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044904.

105 Tan Y Y, Chen Y R, Fu W J. Real-time dynamics of the O(4) scalar theory within the fRG approach[J]. SciPost Physics, 2022, **12**: 26. DOI: 10.21468/scipostphys.12.1.026.

106 Yabunaka S, Delamotte B. Surprises in $O(N)$ models: nonperturbative fixed points, large N limits, and multicriticality[J]. Physical Review Letters, 2017, **119**(19): 191602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.191602.

107 Stephanov M A. QCD critical point and complex chemical potential singularities[J]. Physical Review D, 2006, **73**(9): 094508. DOI: 10.1103/physrevd.73.094508.

108 Mukherjee S, Skokov V. Universality driven analytic structure of the QCD crossover: radius of convergence in the baryon chemical potential[J]. Physical Review D, 2021, **103**(7): L071501. DOI: 10.1103/physrevd.103.l071501.

109 Connelly A, Johnson G, Rennecke F, *et al*. Universal location of the Yang-lee edge singularity in $O(N)$ theories[J]. Physical Review Letters, 2020, **125**(19): 191602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.191602.

110 Rennecke F, Skokov V. Universal location of Yang-lee edge singularity for a one-component field theory in $1 \leqslant D \leqslant 4$[J]. Annals of Physics, 2022, **444**: 169010. DOI: 10.1016/j.aop.2022.169010.

111 Ihssen F, Pawlowski J M. Functional flows for complex effective actions[EB/OL]. 2022: arXiv: 2207.10057. https://arxiv.org/abs/2207.10057.